Schwingende Luft

Rüdiger Scholz · Institut für Quantenoptik
Leibniz Universität Hannover

Literatur

Weitere Quellen für Experimente mit Helmholtz-Resonatoren:

- Physikpraktikum an der Hochschule Esslingen. (Hanno Käß, DPG-Schule „Physikalische Praktika" vom 03.März 2011).
- McLennan, J.E. (2003) "A0 and A1 studies on the violin using CO_2, He, and air/helium mixtures." Acustica, **89**, 176-180.
- http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Rudolf_Koenig_Apparatus/Helmholtz_Resonator/Helmholtz_Resonator.html

1 Akustik

Die Akustik ist das Teilgebiet der Physik, das sich mit Schallwellen beschäftigt. Gegenstandbereich gehen aber weit über rein physikalischen Betrachtungsweisen hinaus: Physiologie, Psychoakustik, Maschinenbau. Typische Arbeitsbereiche de Akustik sind: Ultraschall-/Infraschallphänomene, Unterwasserschall, Eigenschwingungen/Resonanz, Gehör/Gehörschäden, Wahrnehmungsphänomene/Psychoakustik, Kommunikation, Umweltakustik/Lärm, Raumakustik/Orchestersäle, Musikalische Akustik/Instrumentenbau …

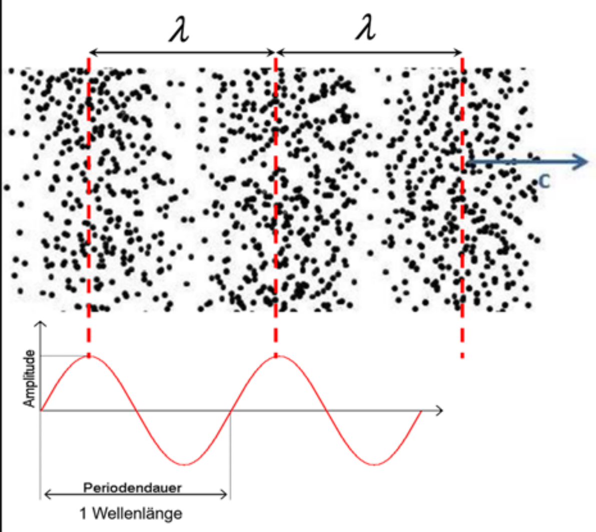
Schall ist eine sich ausbreitende Druck- bzw. Dichteschwankung in der Luft. Blitze erzeugen durch die kurzzeitige Ausdehnung einen kurzen Druckimpuls, den wir als Knall wahrnehmen. Rhythmische Druckschwankungen können, zu hörbaren Tönen und Klängen führen.

2 Schallwellen

Abb. 1 zeigt eine typische Modellvorstellung für Schallwellen. In diesem Bild wandert die periodische Störung mit der Geschwindigkeit c nach rechts. Dabei bewegen sich die Luftteilchen nach links und rechts. Die Schallgeschwindigkeit in Gasen hängt von der Gastemperatur, vom Gasdruck und von der Gasart ab. In Luft bei Normalbedingungen ist

$$c = 344\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Damit kann man z. B. abschätzen, wieweit ein Gewitter entfernt ist: Man stoppt die Zeit zwischen Blitz und Donner. Bei 4 s. kommt man auf etwa 1,4 km.



1 So könnte man sich eine periodische Schallwelle mit der Wellenlänge λ vorstellen: Die Dichte der Luftteilchen nimmt regelmäßig zu und ab. Die Sinuskurve darunter wird auch häufig zur Veranschaulichung der Welle verwendet.

Schallwellen verhalten sich wie andere Wellen auch:

- Sie werden reflektiert (Echo).
- Sie werden gebeugt, d. h., sie erreichen an Hindernissen auch den geometrischen Schattenraum (wie sonst sollte der Straßenlärm auch zu hören sein, obwohl die Straßen zwischen Hochhäusern unsichtbar bleiben.

3 Tonhöhe und Lautstärke

Bereits Galilei hat sich Gedanken über die Tonhöhe gemacht. Er bestimmte Frequenzverhältnisse, die zu bestimmten musikalischen Intervallen gehören:

Intervall	Frequenzverhältnis
Oktave	2:1
Quinte	3:2
Quarte	4:3
Terz groß/klein	5:4/6:5

Frequenzen, also die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde werden in Hz angegeben. Dabei ist 1 Hz = 1 Schw/s. Der Bereich von Menschen hörbaren Schalls liegt zwischen etwa 20 Hz und 20 kHz. Wellenlänge λ, Frequenz f und Schallgeschwindigkeit hängen direkt miteinander zusammen:

$$\lambda = \frac{c}{f}. \qquad (1)$$

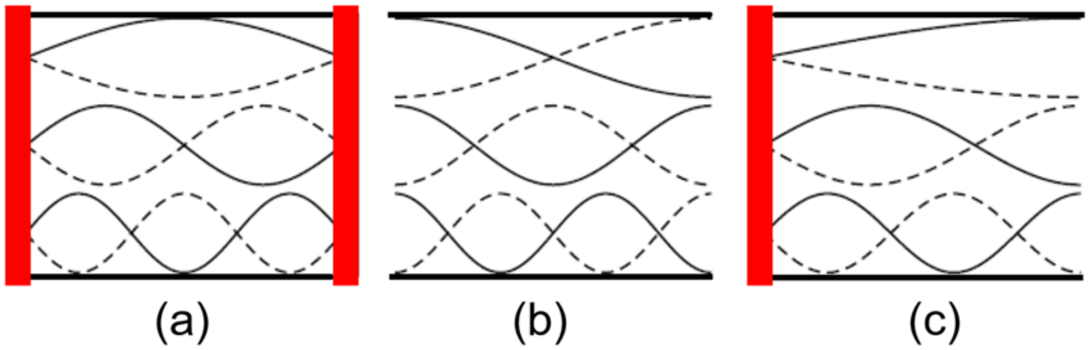
Zum tiefen Ton a eines Kontrabasses (f = 55 Hz) gehört danach eine Wellenlänge: λ = 6,3 m.

Die Lautstärke eines Schallereignisses wird durch die Druckamplitude der Schallwelle bestimmt. Abb. 1 zeigt den Wechsel zwischen hohem und niedrigem Druck. Das gesunde menschliche Ohr kann gerade noch Schall wahrnehmen, bei dem der maximale Druck den Wert $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa hat (Hörschwelle). Bei der Berechnung des Schalldruckpegels L_p wird auf diesen Druck als Vergleichsdruck bezogen. Die relative Unempfindlichkeit bei großen Lautstärken wird dadurch berücksichtigt, dass man den Logarithmus (10er-Logarithmus) verwendet:

$$L_p = 10 \cdot \lg\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right) = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ dB}. \qquad (2)$$

dB steht für die Bezeichnung Dezibel. Da hier nur Verhältnisse berechnet werden, ist Dezibel keine richtige Einheit („Hilfseinheit“). Die Schmerzgrenze liegt für eine Frequenz von 1 kHz bei L_p = 100 dB.

4 Stehende Wellen in Rohren



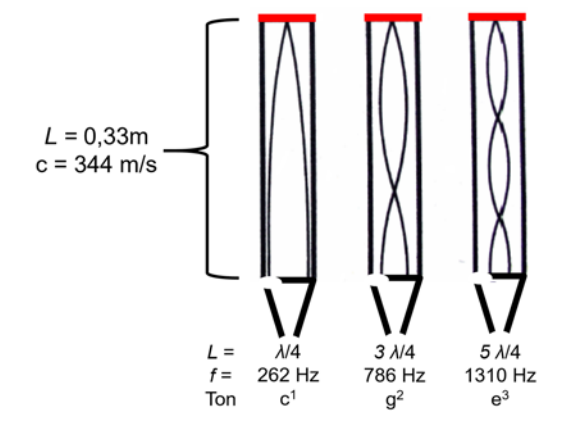
2 Stehende Wellen in einer Röhre: (a) Zwei Enden geschlossen, (b) beidseitig offen, (c) einseitig geschlossen; die Kurven zeigen qualitativ die Geschwindigkeit der Luftteilchen. Am geschlossenen Ende ist diese jeweils null und am offenen maximal.

Breiten sich Schallwellen in einer Röhre aus, werden sie am jeweiligen Ende reflektiert. Als Überlagerung der so gegeneinander laufenden Wellen bildet sich eine stehende Welle aus, wenn die Wellenlänge der Schallwelle auf besondere Weise gerade mit der Rohrlänge zusammenpasst. Abb. 2. zeigt drei Möglichkeiten für eine solche Reflektion: (a) Stehende Wellen in einem beidseitig geschlossenen Rohr (man fragt sich, wie diese zustande gekommen ist); (b) auch am offenen Ende des Rohres treten Reflektionen auf, hier beidseitig offen; (c) schließlich als dritte Möglichkeit die Reflektion an einem offen und einem geschlossenen Ende. Die gebogenen Linien in den Röhren beschreiben qualitativ die sog. *Schnelle* der Luftteilchen. Das ist die Geschwindigkeit, mit der diese Teilchen hin- und herschwingen: Bogen nach oben: Große Schnelle – Bogen nach unten: auch große Schnelle aber gerade entgegengesetzt – dazwischen: Schnelle null, keine Bewegung. Befindet sich an der offenen Seite ein Schwingungserzeuger (zum Beispiel das Labium der Blockflöte oder der angeblasene Hals einer Flasche, wird die Frequenz der Schallwelle (bzw. ihre Wellenlänge) durch die Länge der Röhre bestimmt. Den Fall (c) bezeichnet man auch als gedackte (oder gedeckte) Pfeife.

Widmen wir uns diesem Fall etwas genauer.

Damit die Schallwelle gerade in die Röhre passt, muss die Schnelle am geschlossenen Ende null sein (da bewegt sich keine Luft) und am offenen Ende maximal (da wird durch den Schwingungserzeuger, z. B. das Labium, die Schallwelle mit Energie versorgt. Abb. 3 zeigt, wie das mögli ch ist: Wenn die Rohrlänge gerade 1/4 der Wellenlänge ist, oder 3/4 der Wellenlänge, oder 5/4, der Wellenlänge, oder … Als Formel schreibt man dieser sog. *Resonanzbedingung*:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \frac{1}{4}\lambda \\ L_2 = \frac{3}{4}\lambda \\ L_3 = \frac{5}{4}\lambda \\ \ldots \end{array}\right\} L_n = \frac{2\cdot n-1}{4}\lambda\,. \qquad (3)$$



3 Resonanzbedingung bei der gedeckten Pfeife: Wenn die Rohrlänge gerade ein ungerades Vielfaches der viertel Wellenlänge ist, passt es. Gerade dann ist die Schnelle am geschlossenen Ende null und am Labium maximal.

4 Akustik-Versuch im Physikpraktikum der Hochschule Esslingen
Quelle: Hanno Käß, Hochschule Esslingen

Damit wir schließlich die Rohrlänge bestimmen können, deren Grundschwingung z.B. gerade zum eingestrichen c^1 (Frequenz $f = 262$ Hz) passt, verwenden wir Gl. (1):

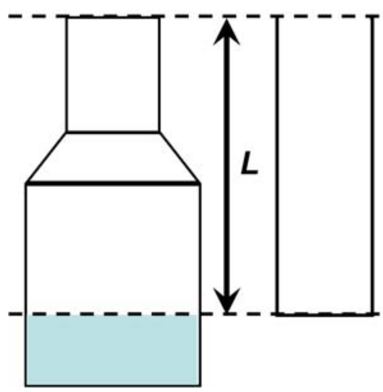
$$L\left(\mathrm{c}^1\right) = \frac{1}{4}\lambda\left(\mathrm{c}^1\right) = \frac{1}{4}\frac{c}{f\left(\mathrm{c}^1\right)} = \frac{1}{4}\frac{344\ \mathrm{m/s}}{262\ \mathrm{Hz}} = 0{,}33\ \mathrm{m}\,.$$

Bläst man eine Pfeife dieser Länge stärker an, können neben der Grundschwingung auch die erste und auch die zweite Oberschwingung anschwingen. Dies sind Schallwellen mit den Frequenzen 786 Hz (zweigestrichenes g) und 1310 Hz (dreigestrichenes e). Das kursive *c* steht in der Gleichung für die Schallgeschwindigkeit und nicht für den Ton c.

5 Resonanzen beim Flaschentuten

Das Phänomen ist bekannt: Bläst man über den Hals einer Flasche lässt sich eine Schwingung der eingeschlossenen Luftsäule anregen und erhalten (Abb. 4). Die Frequenz dieser Schwingung lässt sich über einen weiten Bereich über das eingeschlossene Luftvolumen (die Höhe des Wasserspiegels in der Flasche) verändern.

Die oben beschriebenen Überlegungen lassen sich gut auf dieses Phänomen anwenden. Die Leser mögen als kleine Übung einmal ausrechnen. Wie die Tonhöhe der angeblasenen Flasche von der Länge *L*, dem Abstand zwischen dem oberen Rand des Flaschenhalses, abhängt.



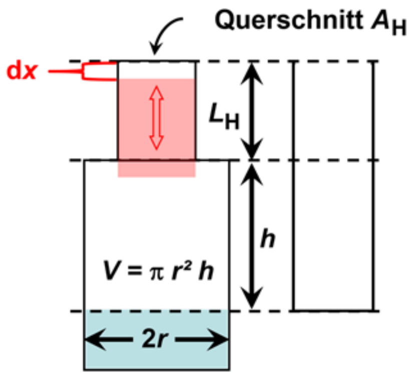
5 Stehende Schallwellen in der tutenden Flasche

Zur Wende vom 19. zum 20. Jahrh. lebte und arbeitete in Berlin der Physiker und Arzt Hermann v. Helmholtz. Er untersuchte u. a. das menschliche Hörvermögen und verwendete dazu akustische Resonatoren, deren Größe in direktem Zusammenhang mit der Tonhöhe standen, die sie durch Resonanz verstärken konnten (Abb. 6). Die Form dieser Resonatoren weist bereits darauf hin, dass unsere einfache Theorie der Tonhöhenfestlegung durch stehende Wellen hier nicht anwendbar ist.

6 Helmholtz-Resonatoren; *Quelle:* Wikipedia

Die Resonanz-Theorie von Hermann v. Helmholtz unterschied sich fundamental von der Pfeifenresonanztheorie.:

Als schwingende Luftsäule betrachten wir dazu in der angeblasenen Flasche nur das Luftvolumen im Flaschenhals deutlich kleinerer Querschnitt A_H). Die Grundidee ist, die Schwingung in der Flasche mit der Schwingung einer Masse an einer Feder zu vergleichen. Das Luftvolumen in der Flasche übernimmt die Funktion der „Rückstellfeder" ($F_R = -k \cdot x$): Zusammengedrückt führt die Ausdehnung zur Rückstellkraft, ist der Druck in der Flasche durch übermäßige Ausdehnung geringer als der Luftdruck um die Flasche, wird die Luft wieder zurückgedrückt.



7 Resonator nach der Helmholtz-Theorie

(1) Die Luftsäule im Flaschenhals schwingt mit der Amplitude dx. Im Fall der harmonischen Schwingung wird die Frequenz durch die Masse m der Luftsäule im Hals und die „Rückstellkraft" des Luftpolsters in der Flasche (Federkonstante k) bestimmt. Setzt man ϱ_{Luft} für die Dichgte der Luft ein und die geometrisachen Größen wie in Abb. 7, kann man das Ergebnis für den einfachen Federschwinger hernehmen und einsetzen:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{A_H L_H \rho_{\text{Luft}}}} \,. \qquad (4)$$

Die „Federkonstante" k leitet sich aus der Elastizität der Luftmasse mit dem Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ab.

(2) Eine Verkleinerung des Volumens um d$V = -A_H \cdot \mathrm{d}x$ bewirkt eine Erhöhung des Drucks im Volumen V um dp und führt zu einer „Rückstellkraft" d$F_R = -A_H \cdot \mathrm{d}p$. Im Frequenzbereich der Akustik erfolgt die Zustandsänderung adiabatisch:

$$p \cdot V^{\kappa} = const. \Rightarrow V^{\kappa}\mathrm{d}p + \kappa\, p \cdot V^{\kappa-1}\mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \mathrm{d}p = -\kappa\, p \cdot V^{-1}\mathrm{d}V$$

Diese Druckänderung führt auf die Rückstellkraft F_R:

$$\mathrm{d}F_R = -A_H \mathrm{d}p = A_H \kappa\, p \cdot V^{-1}\mathrm{d}V = -A_H \kappa\, p \cdot V^{-1} A_H \mathrm{d}x = -\underbrace{\frac{\kappa \cdot p \cdot A_H^2}{V}}_{\text{Federkonstante } k} \mathrm{d}x \,.$$

Durch Vergleich mit der Federschwingung ergibt sich die Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{A_\mathrm{H} L_\mathrm{H} \rho_\mathrm{Luft}}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p \cdot A_\mathrm{H}^2}{V A_\mathrm{H} L_\mathrm{H} \rho_\mathrm{Luft}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho_\mathrm{Luft}}}}_{\text{Schallgeschwindigkeit } c} \cdot \sqrt{\frac{A_\mathrm{H}}{V \cdot L_\mathrm{H}}} \Rightarrow$$

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A_\mathrm{H}}{V \cdot L_\mathrm{H}}}. \tag{5}$$

Dieses einfache Modell berücksichtigt nicht, dass die schwingende Luftmenge im Hals nicht exakt die Innenmaße des Flaschenhalses hat. Tatsächlich ragt diese schwingende Luftmange etwas in Umgebung und das Flachenvolumen hinein („Mündungskorrektur“): L_H muss demnach durch die korrigierte Größe L'_H ersetzt werden, wobei die Korrektur etwa 80% des Flaschenhalsdurchmessers ausmacht (vgl. Lehrbücher über Akustik). Diese Korrektur muss bei der konkreten Auswertung von Messungen berücksichtigt werden.

Beim einfachen Modell der schwingenden Luftsäule bilden sich in der Röhre stehende Longitudinalwellen mit einem Schnelleknoten am geschlossenen Ende und einem Schnellebauch am offenen aus. Für die Grundschwingung der Frequenz f_0 ergibt sich daraus die Resonanzbedingung:

$$L = \frac{\lambda_0}{4} \Rightarrow f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{4 \cdot L} \approx \frac{c}{4 \cdot L_H}.$$

Die Qualität der Näherung $L \approx L_\mathrm{H}$ wird sehr stark durch die Form der Flasche bestimmt. Je größer der Unterschied der Durchmesser von Flaschenhals und Flaschenkörper ist, desto weniger lässt sich diese Vereinfachung begründen. Die Mündungskorrektur von L_H beträgt hier etwa 30% des Hals-Innendurchmessers.

Es könnte eine reizvolle Forschungsaufgabesein, herauszufinden, unter welchen Bedingungen die einfache Stehende-Wellen-Theorie das Flaschentuten besser beschreibt und oder die ambitionierte Helmholtz-Resonator-Theorie genommen werden muss.