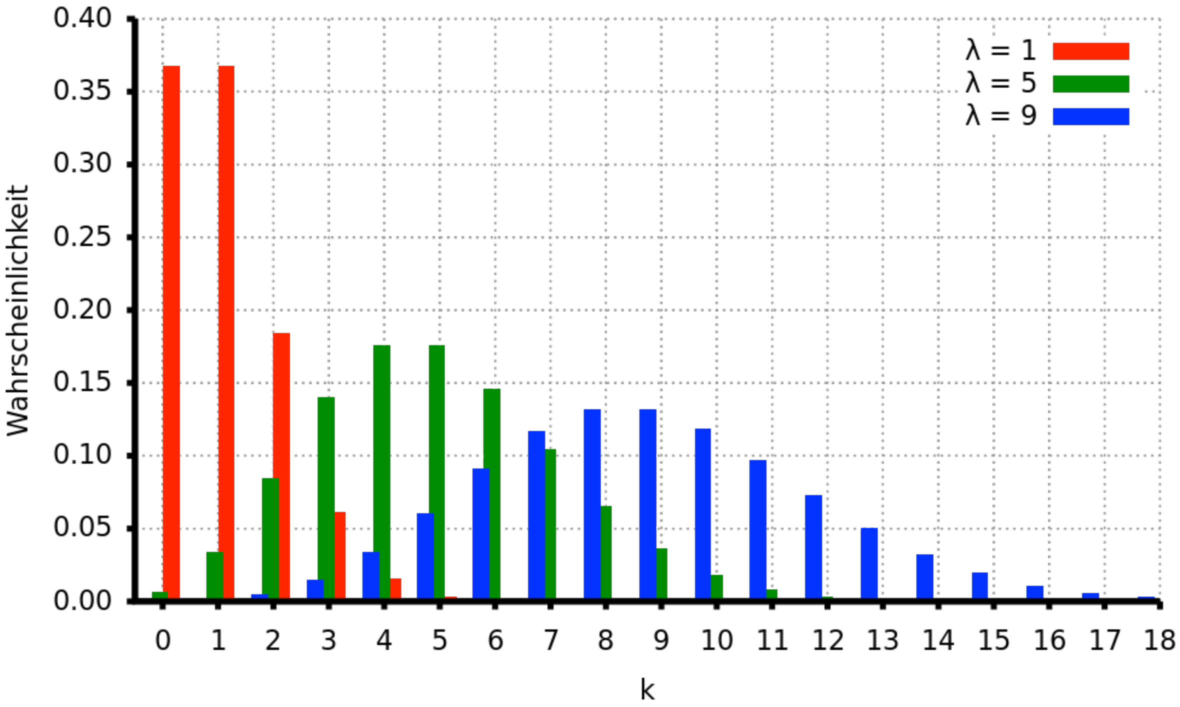


Rüdiger Scholz

Die Poisson-Verteilung

foeXLab-Materialien

Anforderungsniveau	Mathematik	Stichworte	LFB
Theorie: Einfach Experiment: Einfach	mathem Stochastik	Mittelwert, Varianz, Stichprobe, Wahrscheinlich-keitsverteilung, Poisson-Impuls-Prozess	Statistische Optik Fragmente der QO

Motivation

Die Poisson-Verteilung hat in der Optik eine herausragende Rolle als Verteilung kohärenter Lichtfelder. Sie wird experimentell unverzichtbar, wenn der Zugang zur optischen Physik über Zählmessungen (Photomultiplier, Avalanchedioden) angestrebt wird.

1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Statistik von Zählmessungen

Unter einer Zählmessung versteht man in der Physik das einfache Zählen eines Ereignisses, aber auch das Zählen von Ereignissen, wenn diese bestimmten Randbedingungen gehorchen (Koinzidenz, Zeit-/Energiefenster). Alle Zählmessungen unterliegen statistischen Gesetzmäßigkeiten, die im Kern die Ursache für typische Fluktuationen und Schwankungen sind. Häufig sind gezählten Ereignisse selbst das Ergebnis stochastischer Prozesse (Quantenoptik, radioaktiver Zerfall).

1.2 Einige Grundbegriffe

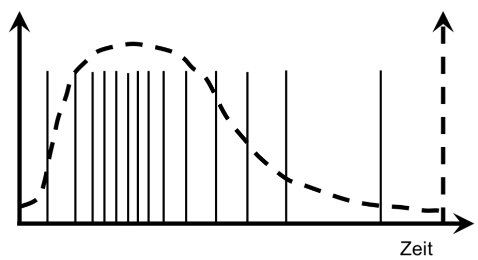
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = m)$ einer diskreten Zufallsgröße X nennt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X bei deiner Messung den Wert m annimmt. Bei kontinuierlichen Größen nennt $P(i = I)\mathrm{d}I$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße i eine Wert aus dem Intervall $[I, I + \mathrm{d}I]$ annimmt. Man definiert die wichtigen Größen **Mittelwert** $\langle X \rangle$ und **Varianz** $\sigma(X)^2$:

$$\langle X \rangle = \sum_m m \cdot P(X = m); \ \sigma^2 = \sum_m \left(m - \langle X \rangle\right)^2 P(X = m)$$

$$\langle i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}I \cdot I \cdot P(I = i); \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}I \cdot \left(I - \langle i \rangle\right)^2 \cdot P(I = i)$$

1.3 Der Poisson-Impuls-Prozess (PIP)

Die Abb. rechts zeigt eine Folge von scharfen Impulsen (die senkrechte Striche) sowie, gestrichelt, eine Ratenfunktion $\lambda(t)$, die angibt, wie viel Impulse in der Zeit $\mathrm{d}t$ auftreten.



Stelle Sie sich z. B eine Folge von elektrischen Spanungspulsen aus deinen Geigerzählrohr vor, Form und Höhe der Impulse ist irrelevant (=Geigermodus). wichtig ist immer nur der Zeitpunkt des Impulses t_k:

$$U(t) = \sum_k U_0\left(t - t_k\right). \tag{1}$$

Vorausgesetzt, $\lambda(t)$ die Anzahl der Impulse pro Sekunde, ist bekannt; die jetzt auftretende Aufgabe liegt dann auf der Hand: Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(m, t, t + \tau_D)$ misst man innerhalb einer Messzeit τ_D zwischen t und $t + \tau_D$ gerade m Impulse?

1.4 Die Begründung der Poisson-Verteilung

Wenn die einzelnen Pulse statistisch unabhängig sind, nicht zwei zusammenfallen und die Ratenfunktion $\lambda(t)$ bekannt ist, lässt sich Wahrscheinlichkeit berechnen. Die Überlegung ist aus dem Stochastikunterricht an Schule bekannt

- Man beginnt mit der Stichprobengröße: M unabhängige Ereignisse werden auf die gesamte Prozessdauer verteilt, man findet sie zu den Zeiten t_k für k =1, 2, ..., M jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p(t_k) = \lambda(t)\mathrm{d}t$. Die Anzahl m von Ereignissen zwischen den Zeiten t und $t + \tau_\mathrm{D}$ ist dann binomial verteilt:

$$P\left(m;t,t+\tau_\mathrm{D}\right)=\frac{M!}{m!\left(M-m\right)!}\left(\int_t^{t+\tau_\mathrm{D}}\lambda\left(t'\right)\mathrm{d}t'\right)^m\left(1-\int_t^{t+\tau_\mathrm{D}}\lambda\left(t'\right)\mathrm{d}t'\right)^{M-m} \tag{2}$$

Im Grenzfall seltener Ereignisse aber großer Stichproben, $p(t)$ gegen Null und zugleich $M\cdot p(t) = \lambda(t)\mathrm{d}t$

$$P\left(m;t,t+\tau_\mathrm{D}\right)=\frac{\langle m\rangle_{t,t+\tau_\mathrm{D}}^m}{m!}\exp\left(-\langle m\rangle_{t,t+\tau_\mathrm{D}}\right);\text{ wobei }\langle m\rangle_{t,t+\tau_\mathrm{D}}=\int_t^{t+\tau_\mathrm{D}}\lambda\left(t'\right)\mathrm{d}t' \tag{3}$$

1.5 Herleitung der Poisson-Verteilung – etwas strenger

(1) Die Wahrscheinlichkeit für einen einzigen Impuls im Interval zwischen t und $t + \mathrm{d}t$ ist gerade

$$P\left(1,t,t+\mathrm{d}t\right)=\lambda\left(t\right)\mathrm{d}t\,.$$

(2) Während der Zeit $\mathrm{d}t$ gibt es keine „multiple-events" also nie mehr als einen Impuls:

$$P\left(0,t,t+\mathrm{d}t\right)=1-\lambda\left(t\right)\mathrm{d}t$$

(3) Die Zahl der Impulse in nicht überlappenden Zeitintervallen sei statistisch unabhängig. Damit kann $P(m,t,t + \tau_\mathrm{D})$ ausgerechnet werden:

$$P\left(m,t,t+\tau+\mathrm{d}\tau\right)=\underbrace{P\left(m,t,t+\tau\right)}_{m\text{ Impulse in der Zeit }t\text{ bis }t+\tau}\;\underbrace{\left(1-\lambda\left(t+\tau\right)\mathrm{d}\tau\right)}_{\text{kein Impulse in der Zeit }t\text{ bis }t+\tau+\mathrm{d}\tau}+\underbrace{P\left(m-1,t,t+\tau\right)}_{m\text{ Impulse in der Zeit }t\text{ bis }t+\tau}\;\underbrace{\lambda\left(t+\tau\right)\mathrm{d}\tau}_{\text{ein Impulse in der Zeit }t\text{ bis }t+\tau+\mathrm{d}\tau}$$

Diese Gleichung kann man umschreiben:

$$\frac{P\left(m,t,t+\tau+\mathrm{d}\tau\right)-P\left(m,t,t+\tau\right)}{\mathrm{d}\tau}=\lambda\left(t+\tau\right)\left(P\left(m-1,t,t+\tau\right)-P\left(m,t,t+\tau\right)\right)$$

als Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P\left(m,t,t+\tau\right)=\lambda\left(t+\tau\right)\left(P\left(m-1,t,t+\tau\right)-P\left(m,t,t+\tau\right)\right)$$

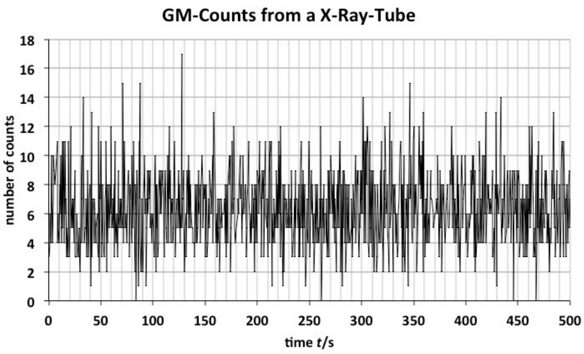
Mit dem Anfangswert $P(0,t,t) = 1$ kann man als Lösung dieser Gleichung die Poisson-Verteilung finden:

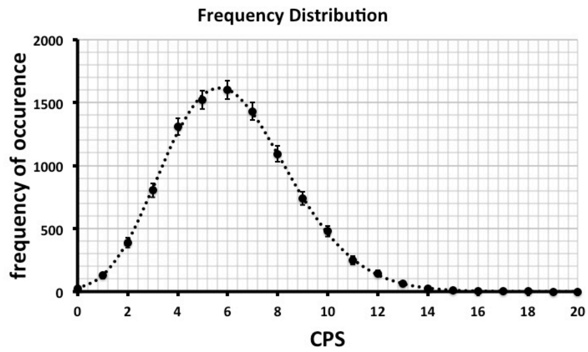
$$P\left(m;t,t+\tau\right)=\frac{\langle m\rangle_{t,t+\tau}^m}{m!}\exp\left(-\langle m\rangle_{t,t+\tau}\right);\text{ wobei }\langle m\rangle_{t,t+\tau}=\int_t^{t+\tau}\lambda\left(t'\right)\mathrm{d}t'$$

Das ist aber gerade Gl. (3).

'Consider a beam of light falling on some photoelectric detector, where photoelectrons are ejected in a certain time interval T. Only the photoelectrons and not the photons are, of course, observable and our discussion must therefore be confined to the statistical behaviour of the photoelectrons. [Mandel 1958, 3]

Poissonverteilte Größen, wie Zählrohrimpulse einer Röntgenanlage, haben spezifische Zeitreihe. Die beiden nächsten Abbildungen zeigen als Gegenüberstellung: Die Zeitreihe, die Häufigkeitsverteilung und zum Vergleich die Poisson-Verteilung sowie die Nomralverteilung gleicher Varianz. Man sieht: Der Mittelwert der Normalverteilung stimmt nicht.





2 Zusammenstellung einiger wichtiger Verteilungen

2.1 Binomialverteilung (Stichprobengröße M, Erfolgswahrscheinlichkeit p)

$$P_{M,p}(m) = \binom{M}{m} p^m (1-p)^{M-m}$$; Erwartungswert: $n \cdot p$, Varianz: $n \cdot p \cdot (1-p)$

2.2 Poisson-Verteilung

$$P_\mu(m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu)$$; Erwartungswert: μ, Varianz: μ

2.3 Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

$$P_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$; Erwartungswert: $1/\lambda$, Varianz: $1/\lambda^2$

2.4 Exponentialverteilung

$$P_\mu(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$$; Erwartungswert: μ Varianz: σ^2

2.5 Rayleigh-Verteilung

$$P_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right)$$; Erwartungswert: $\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ μ Varianz: $\frac{4-\pi}{2}\lambda^2$

Weiterführende Literatur

1 Bergmann/Schäfer: Optik

2 Schulbuch: ??

Hinweis zur Quellennutzung: Auch wenn ich bemüht war, wirklich sämtliche Quellen deutlich zu benennen, so ist leider nicht auszuschließen, dass einzelne Gedankengänge eingeflossen sind, deren Herkunft ungenannt blieb, weil sie nicht mehr präsent war. Ich bitte dies zu entschuldigen. Nach einem entsprechenden Hinweis würde ich das angemessen korrigieren.

Impressum

Poisson-Verteilung

Trotz sorgfältigster Bearbeitung sind Fehler nie auszuschließen. Für Schäden, die durch Fehler im Werk oder seinen Teilen entstanden sind, kann keine Haftung übernommen werden.

Abbildungen:
Titelbild: Wikipedia
alle anderen: Archiv RS